



Politechnika Wrocławska

Zmodyfikowany funkcjonał Hu-Washizu w analizie plastycznej MES dźwigarów powierzchniowych

obrona rozprawy doktorskiej, 10.01.2018

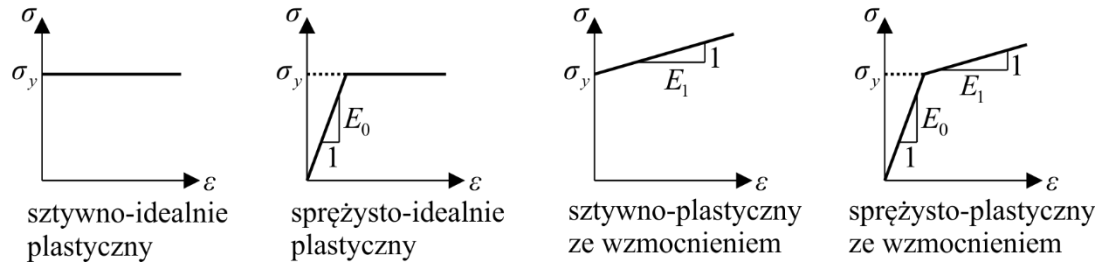
Jakub Lewandowski
promotor: dr hab. inż. Kazimierz Myślecki, prof. PWr

Ramowy plan prezentacji

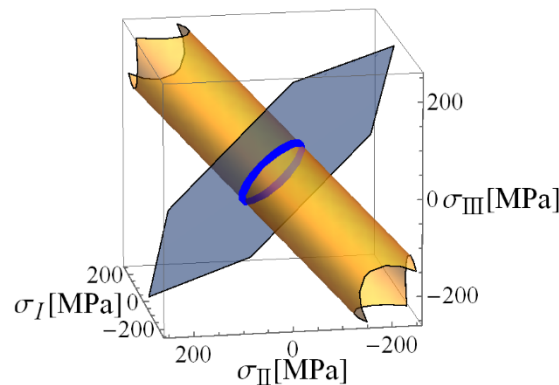
1. Wprowadzenie do teorii plastyczności
2. Cel pracy
3. **Zmodyfikowany funkcjonał Hu-Washizu**
4. Funkcjonał w ujęciu MES
5. Równania MES
6. Algorytm MES
7. Rozpatrywane funkcje plastyczności
8. Przykłady zastosowań funkcjonału, weryfikacja
 - ☐ tarcze
 - ☐ płyty
9. Podsumowanie

Wprowadzenie do teorii plastyczności

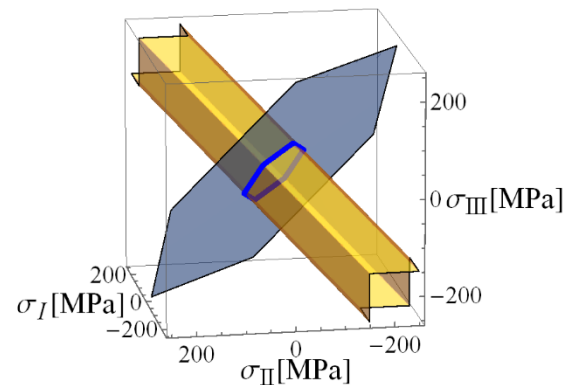
- podstawowe modelu materiału plastycznego



- warunki plastyczności



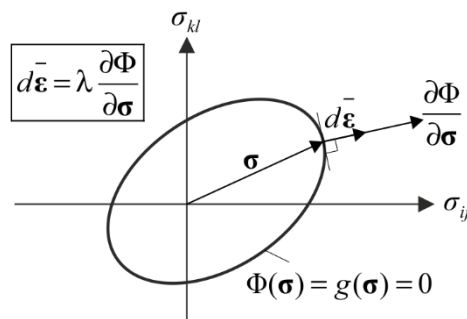
$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - 2\sigma_y^2 = 0$$



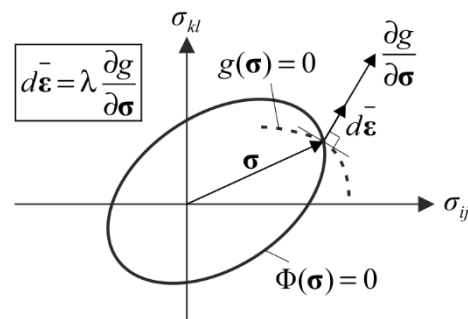
$$\max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|) - \sigma_y = 0$$

Wprowadzenie do teorii plastyczności

- prawo plastycznego płynięcia

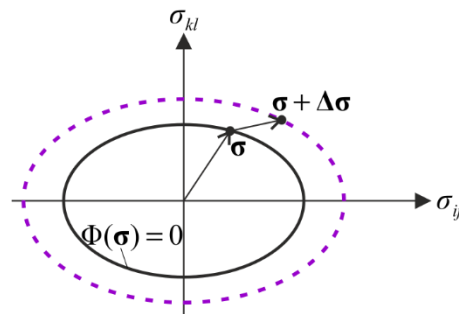


stowarzyszone p. p. p.

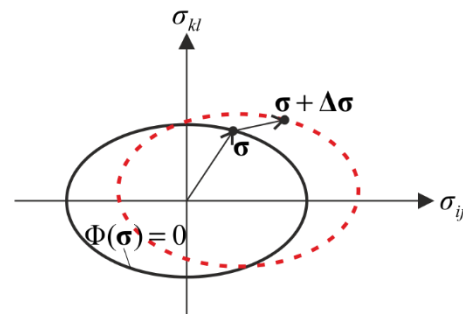


niestowarzyszone p. p. p.

- wzmocnienie materiału

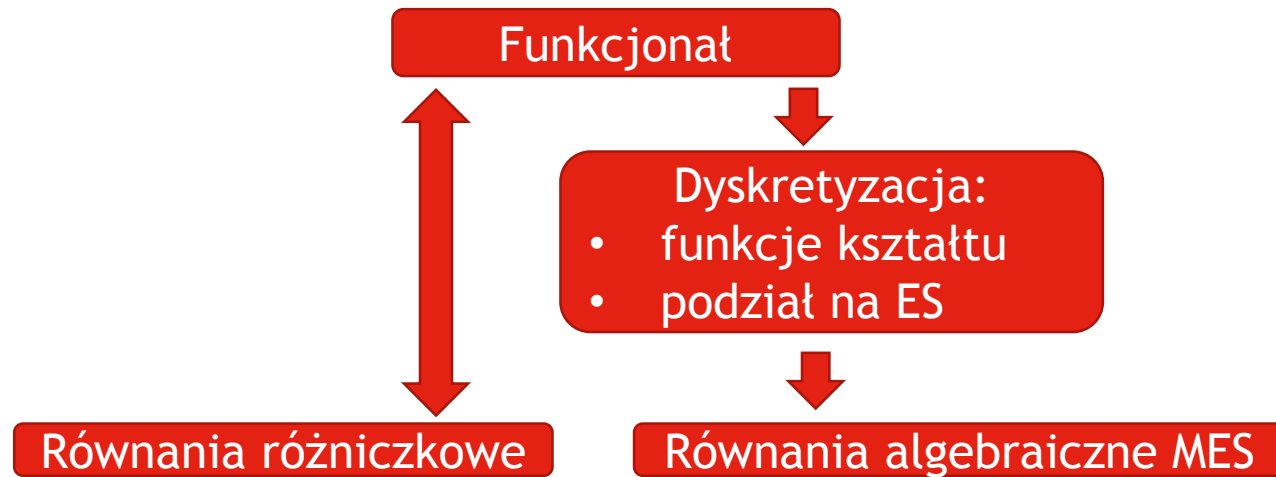


wzmocnienie izotropowe



wzmocnienie kinematyczne

Cel pracy



- Opisane w literaturze i dotychczas stosowane algorytmy MES rozwiązywania zagadnień plastyczności nie wynikają bezpośrednio z funkcjonału (takowy nie istnieje). Stąd równanie **MES nie spełnia wszystkich równań teorii plastyczności**. Algorytmy stosują dodatkowe procedury w celu wymuszenia spełnienia wszystkich równań. Skutki:
 - mała czytelność rozwiązań
 - brak uniwersalnego podejścia do teorii plastyczności w ujęciu MES
 - wydłużenie czasu obliczeń
- Celem pracy było **skonstruowanie funkcjonału pozwalającego na wyprowadzenie równania MES dotyczącego teorii plastyczności**.

Cel pracy

- oryginalny funkcjonal Hu-Washizu dla równań teorii sprężystości

$$\Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV - \int_V \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_V f_i u_i dV + \dots$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad \text{gdzie}$$

C_{ijkl}	–	tensor stałych materiałowych
$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$	–	tensory naprężenia i odkształcenia
u_i	–	wektor przemieszczeń
f_i	–	wektor sił objętościowych

Teorię plastyczności opisują równania przyrostowe

- funkcjonał dla przyrostowych równań teorii sprężystości

$$\Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^n) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) dV - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_V \Delta f_i u_i dV + \dots$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n)_{,j} + \Delta f_i = 0 \\ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases}$$

Zmodyfikowany funkcjonał Hu-Washizu

- funkcjonał dla równań teorii plastyczności

$$\Pi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, \lambda) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^n) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) dV - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) \left[\varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij}^n - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV - \int_V \Delta f_i u_i dV - \int_V \lambda \Phi(\sigma_{ij}) dV + \dots$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n)_{,j} + \Delta f_i = 0 \\ (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^n) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^n) \\ \varepsilon_{ij} + \boxed{\bar{\varepsilon}_{ij}^n + \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \Phi(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases} \quad \text{gdzie}$$

$\bar{\varepsilon}_{ij}^n$ – tensor odkształceń plastycznych
 Φ – funkcja plastyczności
 λ – współczynnik przyrostu odkształceń plastycznych

- założenia (ograniczenia):

- ☐ liniowe związki geometryczne
- ☐ stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia
- ☐ dowolna różniczkowalna funkcja plastyczności (także uwzględniająca wzmocnienie)

$$\bar{\Delta \varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Funkcjonał w ujęciu MES

Równania MES

- przyjmując liniowe funkcje kształtu, stałe naprężenia i odkształcenia w ES

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^n)^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^n)V - (\Delta \mathbf{f})^T \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^n)^T \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \mathbf{B}\mathbf{q} \right)V - \lambda \Phi V$$

$$\text{gdzie} \quad \begin{cases} \mathbf{I} & - \text{macierz identycznościowa} \\ \mathbf{q} & - \text{wektor przemieszczeń} \\ \Delta \mathbf{f} & - \text{przyrost wektora obciążeń} \\ \mathbf{B} = \int_V \mathbf{B} dV, \mathbf{B} & - \text{macierz geometryczna} \end{cases}$$

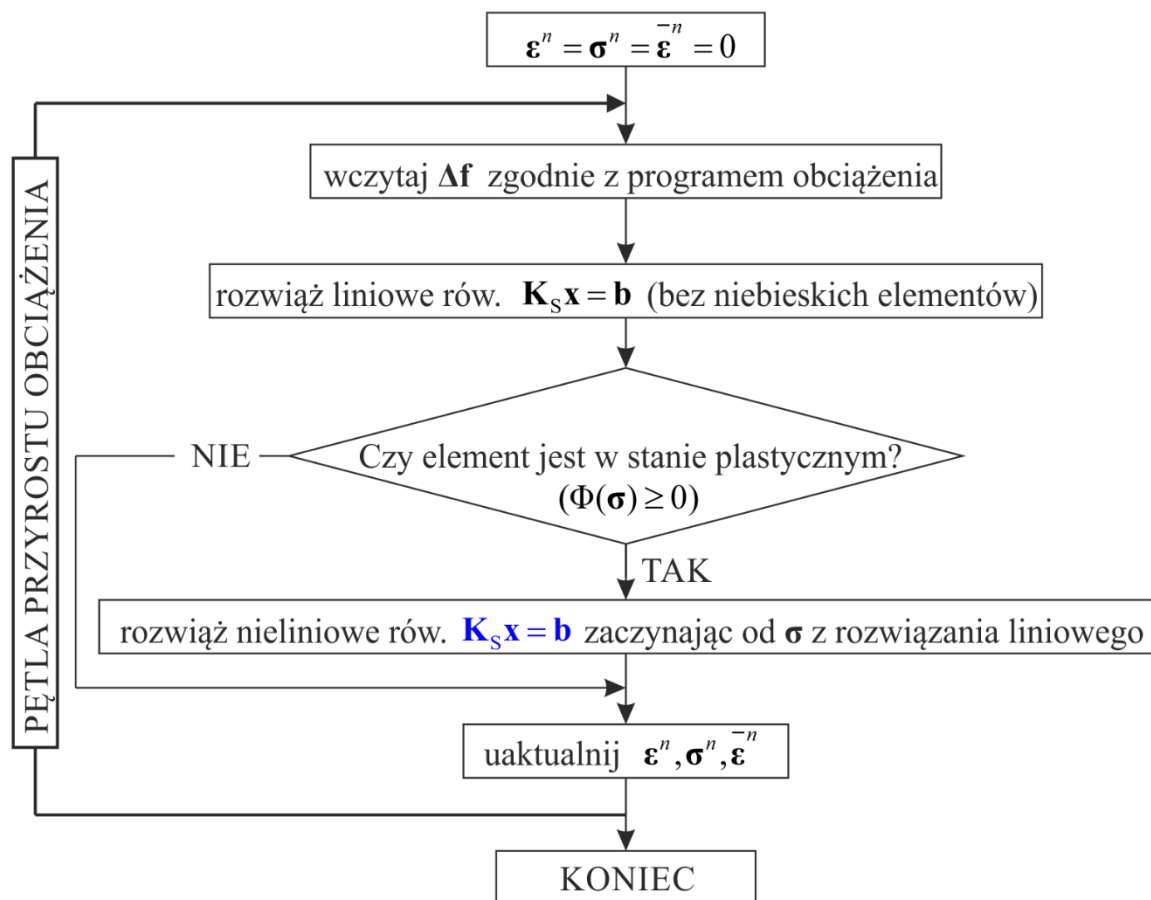
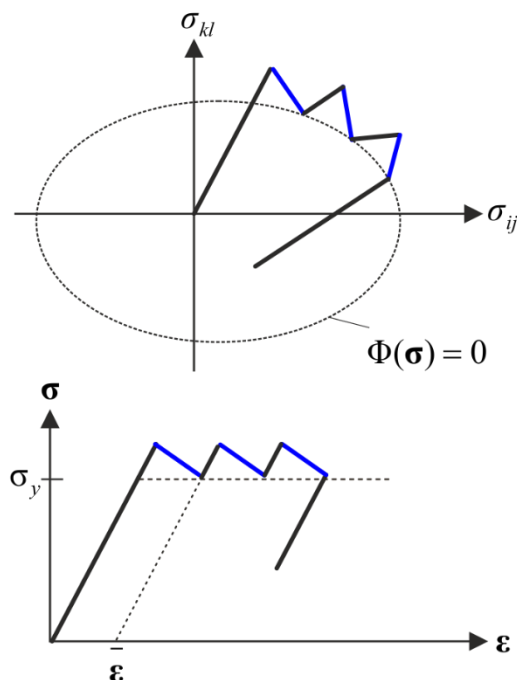
- minimalizacja funkcjonału prowadzi do układu równań MES

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C} V & -\mathbf{I} V & 0 \\ \mathbf{B} V & -\mathbf{I} V & \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^n V \\ (\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\sigma}^n) V \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n V \\ b^\lambda \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{K}_S \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Algorytm MES



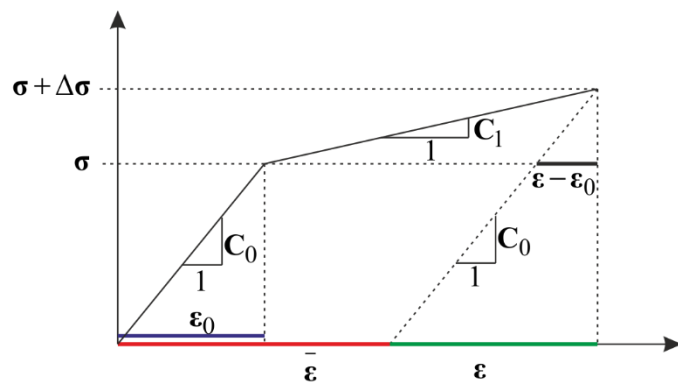
Rozpatrywane funkcje plastyczności

- kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH)

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2\sigma_y^2$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

- kryterium HMH ze wzmocnieniem kinematycznym



$$\begin{cases} \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_1 (\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \end{cases} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}]^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

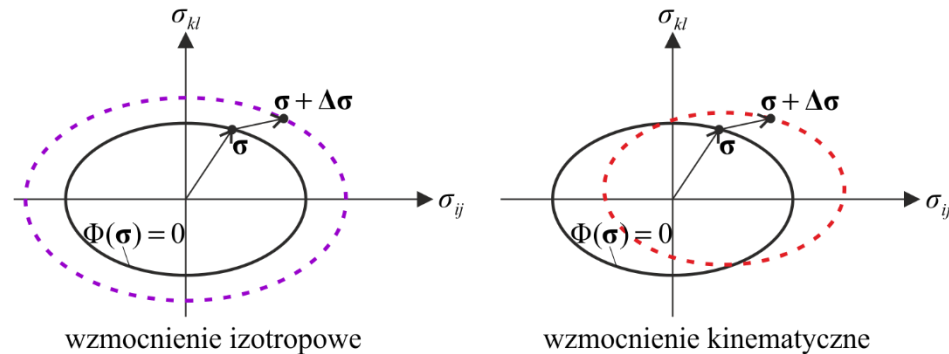
$$\Phi(\boldsymbol{\sigma} - \Delta\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \Delta\boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{\Psi} (\boldsymbol{\sigma} - \Delta\boldsymbol{\sigma}) - 2\sigma_y^2$$

$$\mathbf{C}_1 = \alpha \mathbf{C}_0 \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \mathbf{C}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow$$

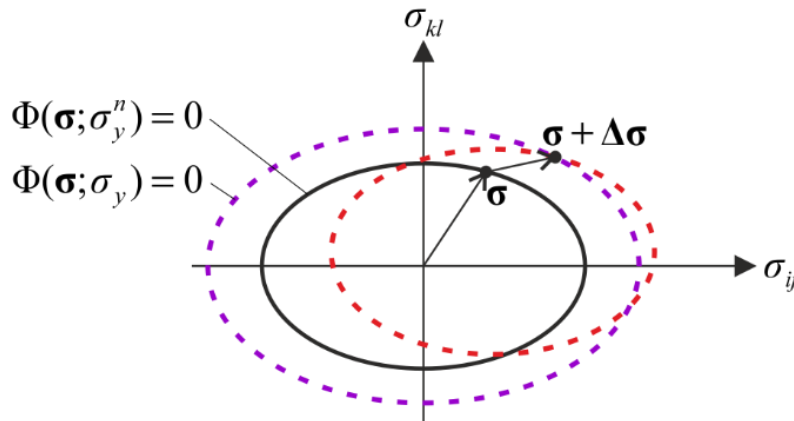
$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\sigma_y^2$$

Rozpatrywane funkcje plastyczności

- kryterium HMM ze wzmocnieniem izotropowym



W obrębie kroku pętli przyrostowej uaktualnia się σ_y :



krok n

$$\Phi(\sigma; \sigma_y^n) = \frac{1}{2} \sigma^T \psi \sigma - 2(\sigma_y^n)^2$$

Krok n+1

$$\Phi(\sigma; \sigma_y) = \frac{1}{2} \sigma^T \psi \sigma - 2(\sigma_y)^2$$

Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- równanie MES

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^T V & 0 \\ 0 & \mathbf{C} V & -\mathbf{I} V & 0 \\ \mathbf{B} V & -\mathbf{I} V & \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} & \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^n V \\ (\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\sigma}^n) V \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n V \\ b^\lambda \end{bmatrix}$$

- płaski stan naprężenia (PSN), materiał izotropowy, trójkątne ES

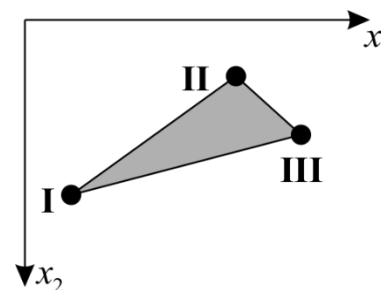
$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = [q_1^I, q_2^I, q_1^{II}, q_2^{II}, q_1^{III}, q_2^{III}]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]^T$$

$V = \text{pole trójkąta} \times \text{grubość ES}$



- funkcje plastyczności dla PSN

- o idealna plastyczność

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - 2\sigma_y^2$$

- o wzmocnienie kinematyczne

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\sigma_y^2$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- równanie MES - idealna plastyczność

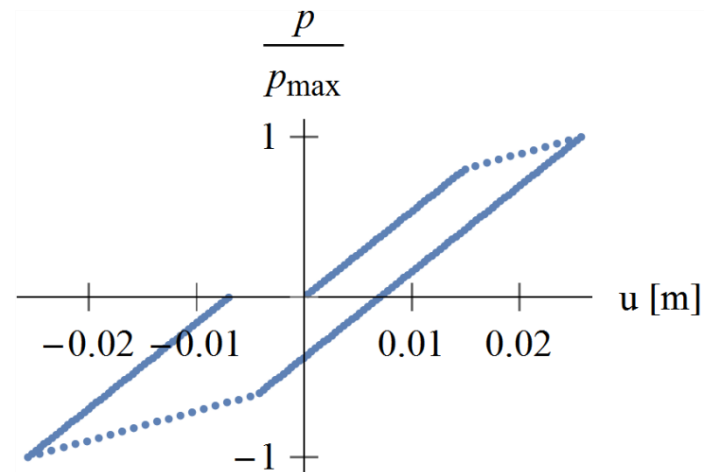
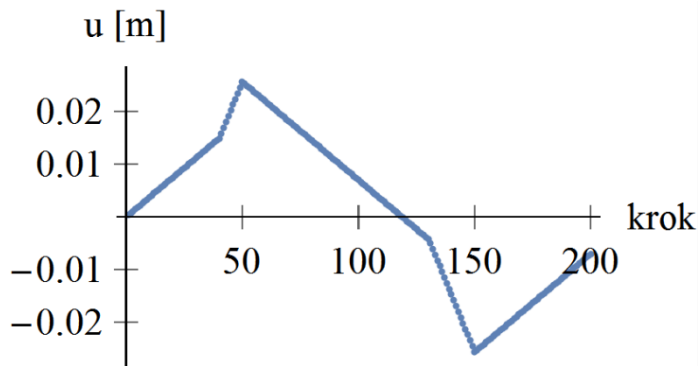
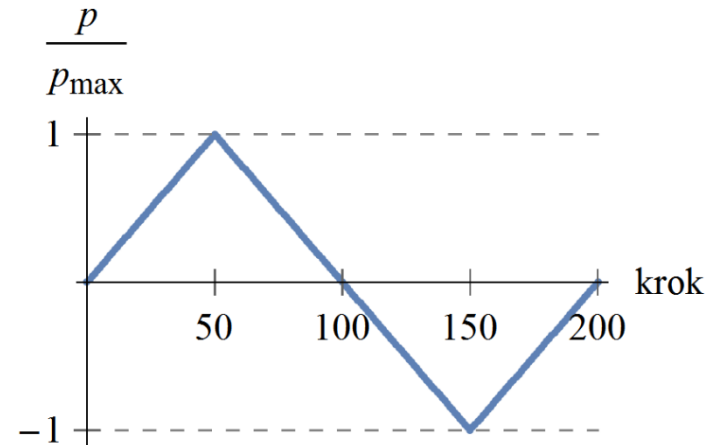
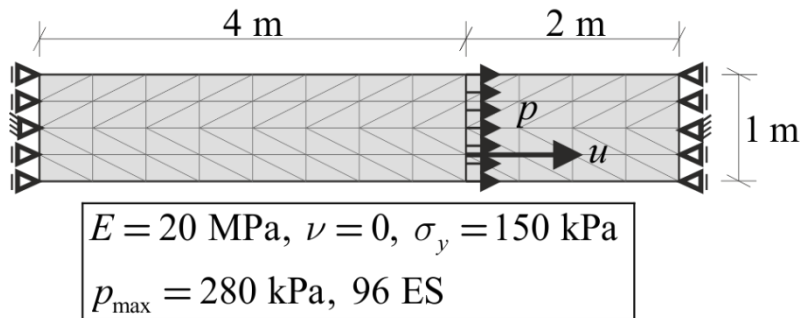
$$\begin{cases} \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = -\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\sigma}V, & \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\Psi}V \\ \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = 0, & b^\lambda = -2\sigma_y^2V \end{cases}$$

- równanie MES - wzmocnienie kinematyczne

$$\begin{cases} \mathbf{K}_S^{\sigma\sigma} = 0 \\ \mathbf{K}_S^{\sigma\lambda} = -\left(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} + \left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\Psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right] \right) V \\ \mathbf{K}_S^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\Psi}V + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} + \left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\Psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}V \\ \mathbf{K}_S^{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\Psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\Psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right] V \\ \quad - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{\lambda} \left[\left(\mathbf{I} + \lambda\boldsymbol{\Psi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C} \right)^{-1} \lambda\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right) \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} V \\ b^\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} \right]^T \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{-n} V - 2\sigma_y^2V \end{cases}$$

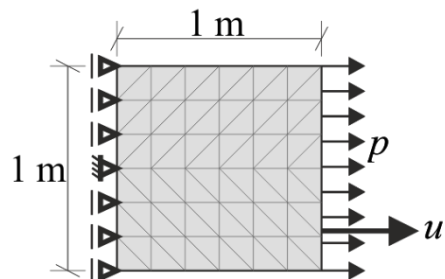
Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- przykład 1 - idealna plastyczność

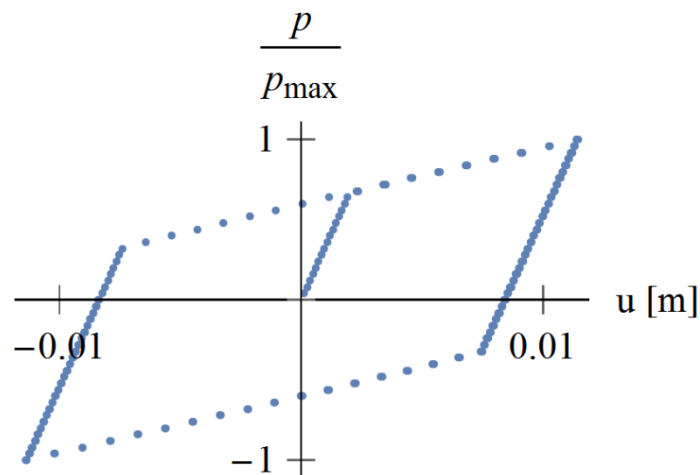
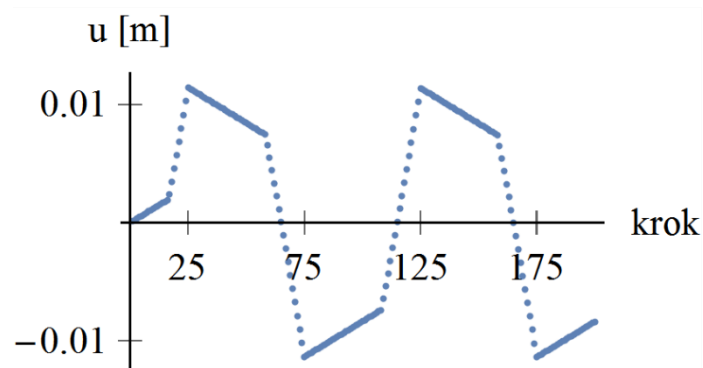
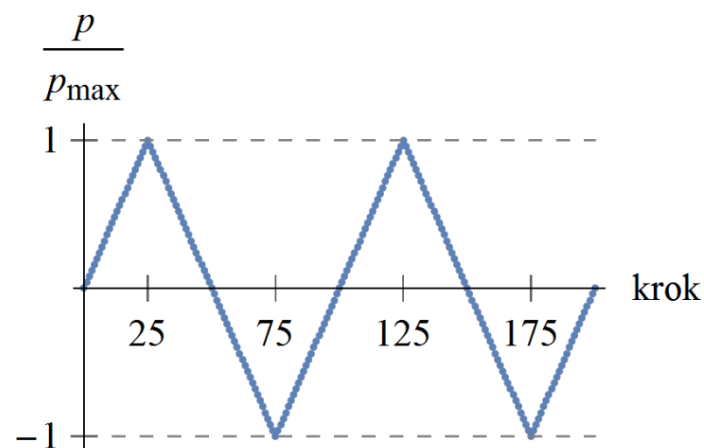


Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- przykład 2 - wzmocnienie kinematyczne

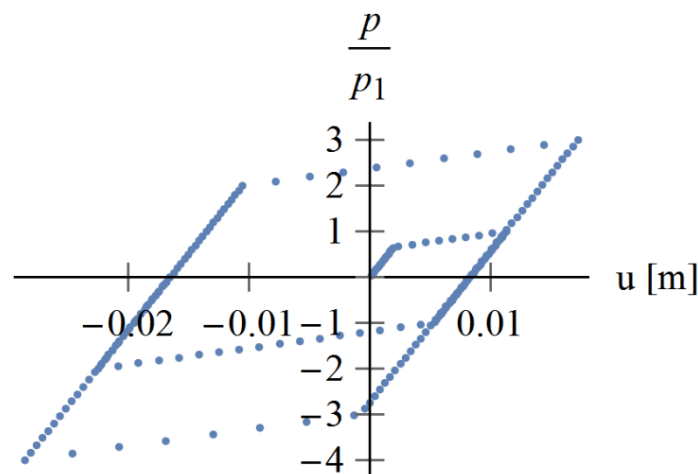
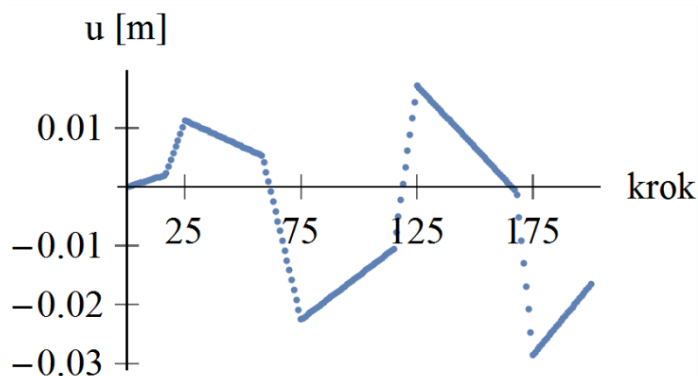
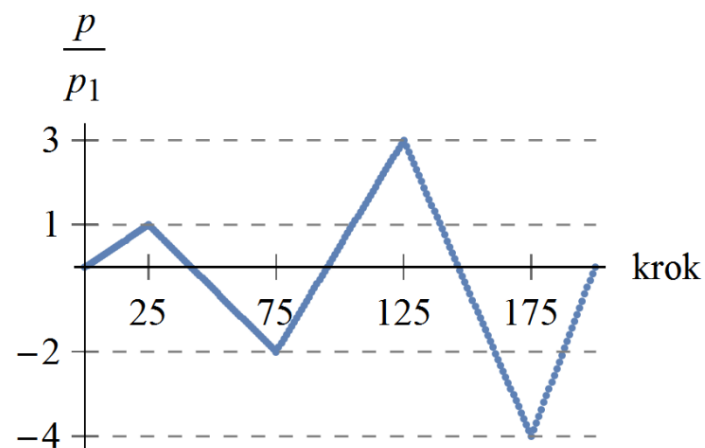
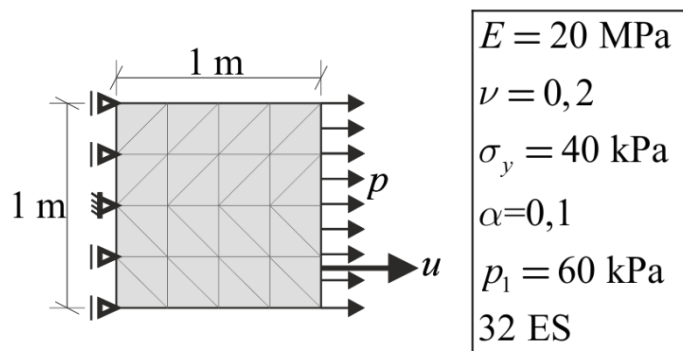


$E = 20 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,2$
 $\sigma_y = 40 \text{ kPa}$
 $\alpha = 0,1$
 $p_{\max} = 60 \text{ kPa}$
 72 ES



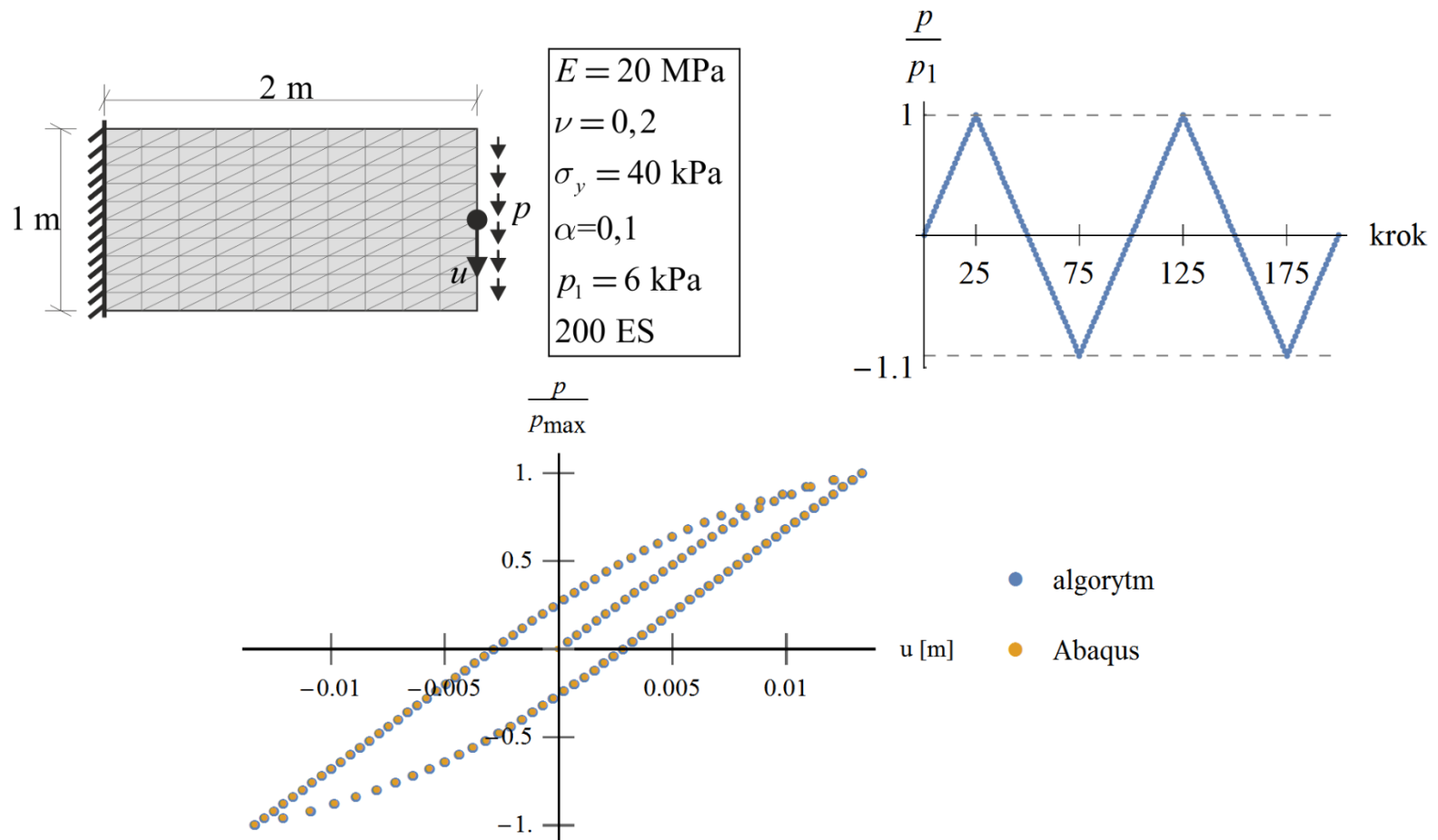
Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- przykład 3 - wzmocnienie izotropowe



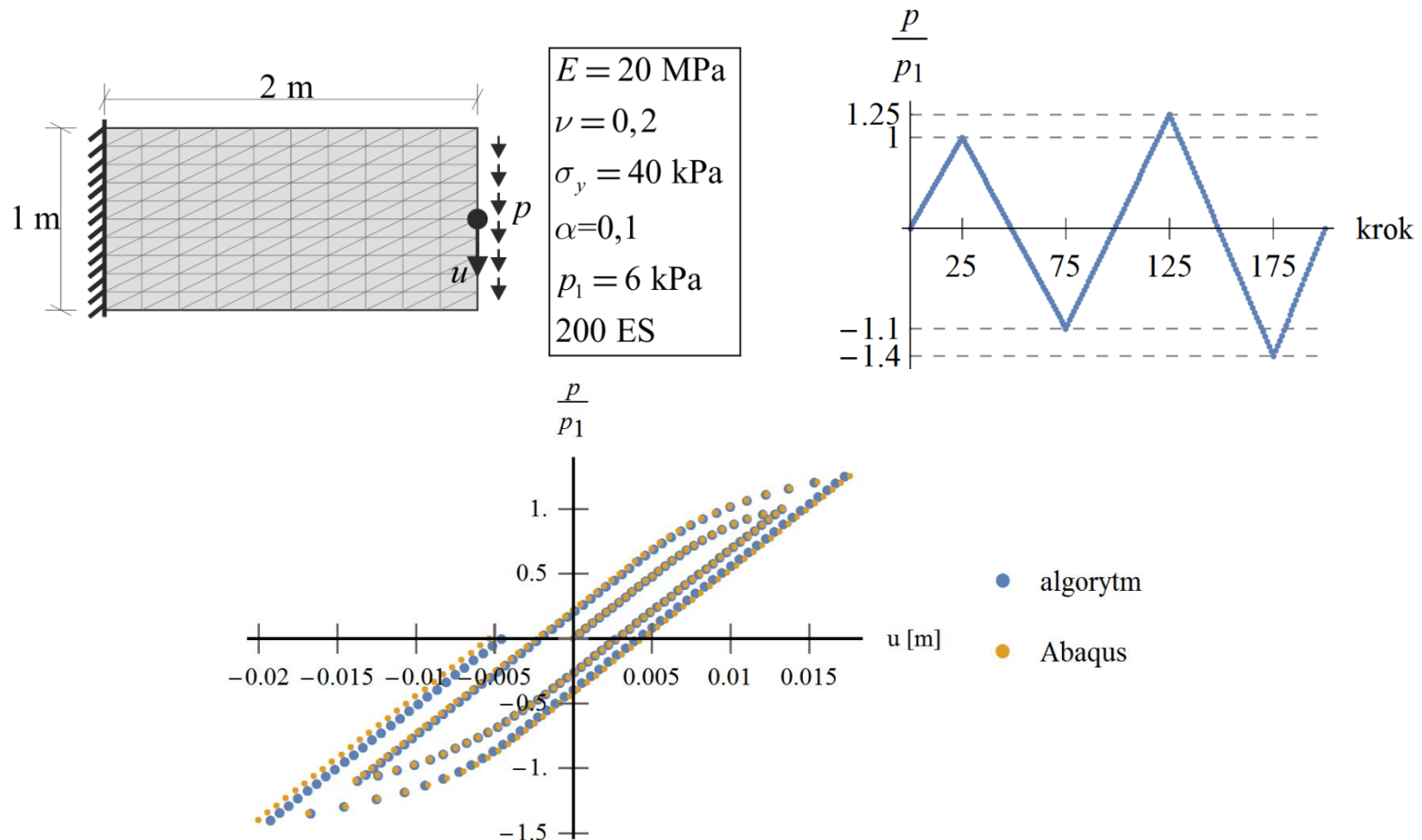
Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- przykład 4 - tarcza wspornikowa, wzmocnienie kinematyczne



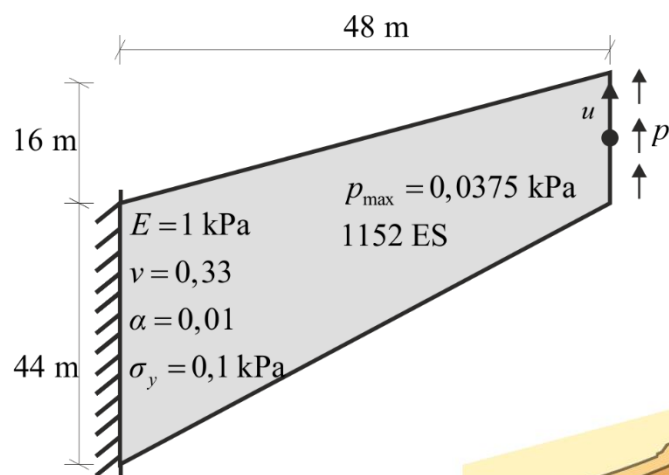
Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

- przykład 5 - tarcza wspornikowa, wzmocnienie izotropowe

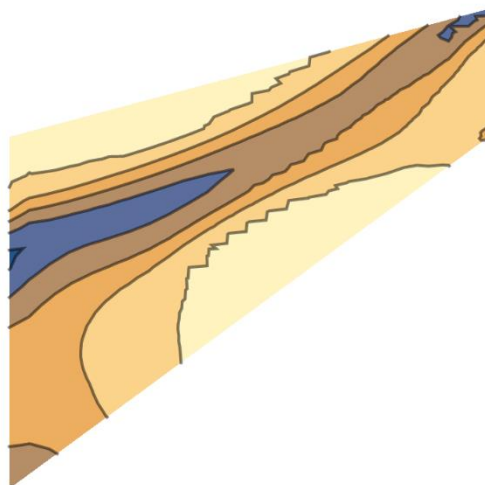


Przykłady zastosowania, weryfikacja Tarcze

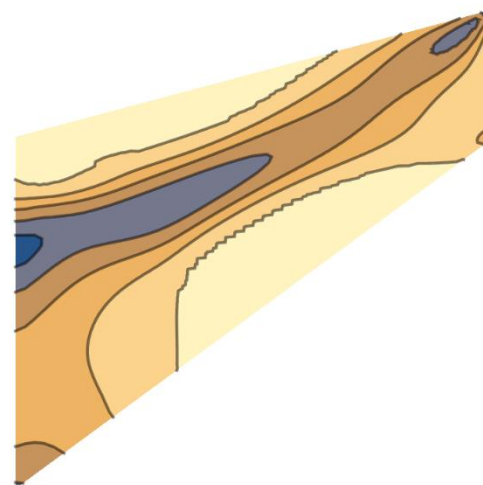
- przykład 6 - membrana Cooke'a



Y.P. Cao, N. Hu, H. Fukunaga, J. Lu, Z.H. Yao,
*A highly accurate brick element based on a three-field
variational principle for elasto-plastic analysis,*
Finite Elements Anal. Des. 39 (2003) 1155-1171

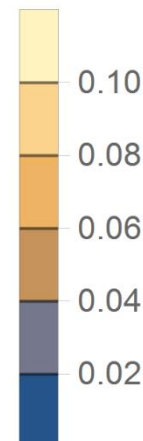


algorytm

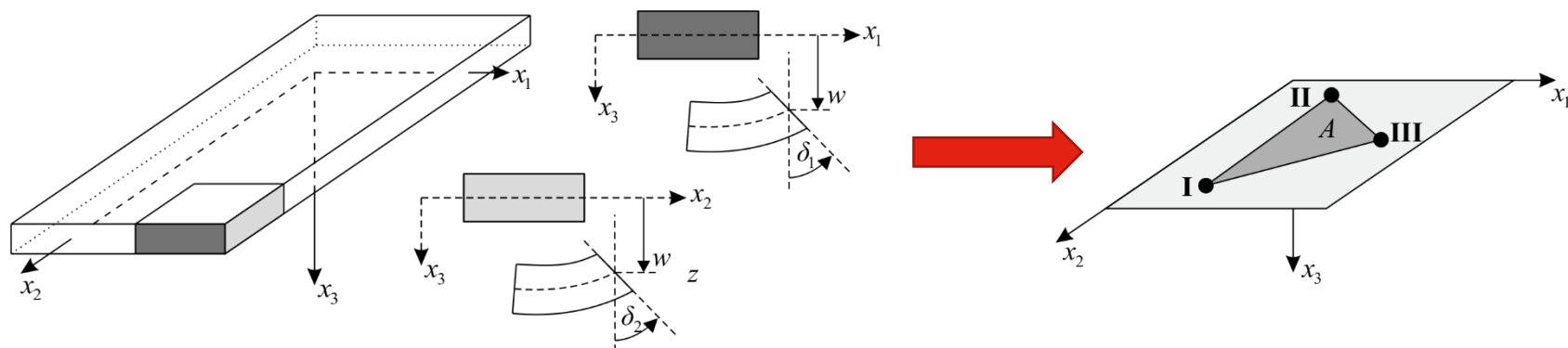


Abaqus

napr. HMH [kPa]



Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty



- funkcjonał opisujący płytę

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{u}_p, \lambda_p) = \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_p^n)^T \mathbf{C}_p (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_p^n) dA - \int_A (\boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_p^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^n - \mathbf{L} \mathbf{u}_p) dA - \int_A (\Delta \mathbf{f}_p^T \mathbf{u}_p) dA - \int_A \lambda_p \Phi(\boldsymbol{\sigma}_p) dA$$

$\boldsymbol{\sigma}_p = [M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2]^T$ – siły wewnętrzne

$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}, \gamma_1, \gamma_2]^T$ – uogólnione odkształcenia

$\mathbf{u}_p = [\delta_1, \delta_2, w]^T$ – uogólnione przemieszczenia

$\mathbf{f}_p = [m_1, m_2, q]^T$ – intensywność momentów i obciążeń pionowych

$\mathbf{L}$ – macierz operatorów różniczkowych

$\mathbf{C}_p$ – macierz stałych sprężystości

Funkcjonał ten zakłada uplastycznienie fragmentu powierzchni płyty

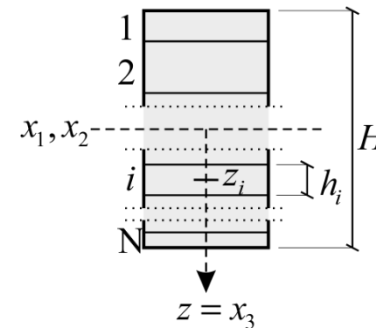
Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty

- funkcjonał po przejściu na naprężenia i odkształcenia w poszczególnych warstwach

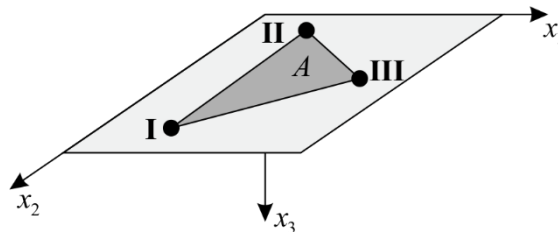
$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{u}_p, \lambda_i) = \frac{1}{2} \int_A \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) h_i \right] dA - \int_A \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^n - \mathbf{M}_i \mathbf{L} \mathbf{u}_p) h_i \right] dA$$

$$- \int_A (\Delta \mathbf{f}_p^T \mathbf{u}_p) dA - \int_A \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) h_i] dA$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_i = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}]_i^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]_i^T \end{cases}, \quad i - \text{numer warstwy}$$



- funkcjonał dla ES



$$\mathbf{q} = [\delta_1^I, \delta_2^I, w^I, \delta_1^{II}, \delta_2^{II}, w^{II}, \delta_1^{III}, \delta_2^{III}, w^{III}]^T$$

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{q}, \lambda_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^n) V_i \right]$$

$$- \sum_{i=1}^N \left[(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^n)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^n - \mathbf{B} \mathbf{q}) V_i \right]$$

$$- \Delta \mathbf{f}^T \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N [\lambda_i \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}_i) V_i]$$

Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty

- równanie MES

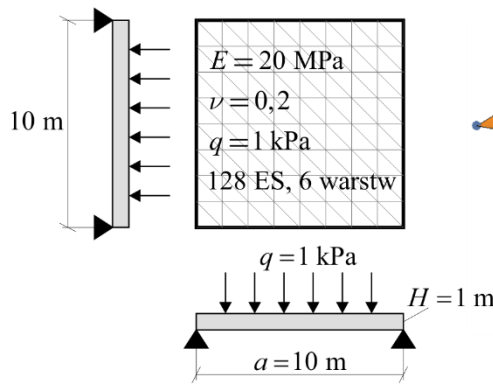
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{B}^T \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \mathbf{V} & -\mathbf{I} \mathbf{V} & 0 \\ \mathbf{B} \mathbf{V} & -\mathbf{I} \mathbf{V} & \mathbf{K}_S^{SS} & \mathbf{K}_S^{SA} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_S^{AS} & \mathbf{K}_S^{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F} + \mathbf{B}^T \mathbf{S}^n \mathbf{V} \\ \mathbf{C} \mathbf{E}^n \mathbf{V} - \mathbf{S}^n \mathbf{V} \\ \bar{\mathbf{E}}^n \mathbf{V} \\ \mathbf{b}^\lambda \end{pmatrix}, \text{ gdzie } \begin{cases} \mathbf{S} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]^T \\ \mathbf{E} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N]^T \\ \mathbf{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T \end{cases}$$

- przykłady - warunek HMM w i-tej warstwie

$$\Phi_i(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_i^T \psi \sigma_i - 2(\sigma_{y,i})^2$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- przykład 1 - ugięcie sprężyste płyty podpartej swobodnie

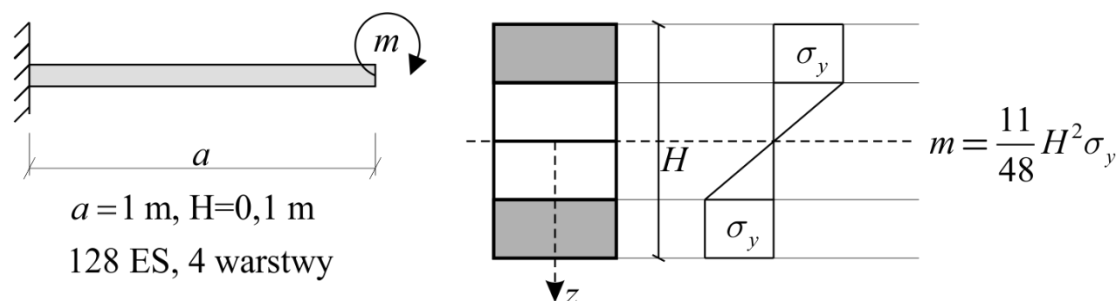


$$w = 0,004062 \frac{qa^4}{D} = 0,0234 \text{ m}$$

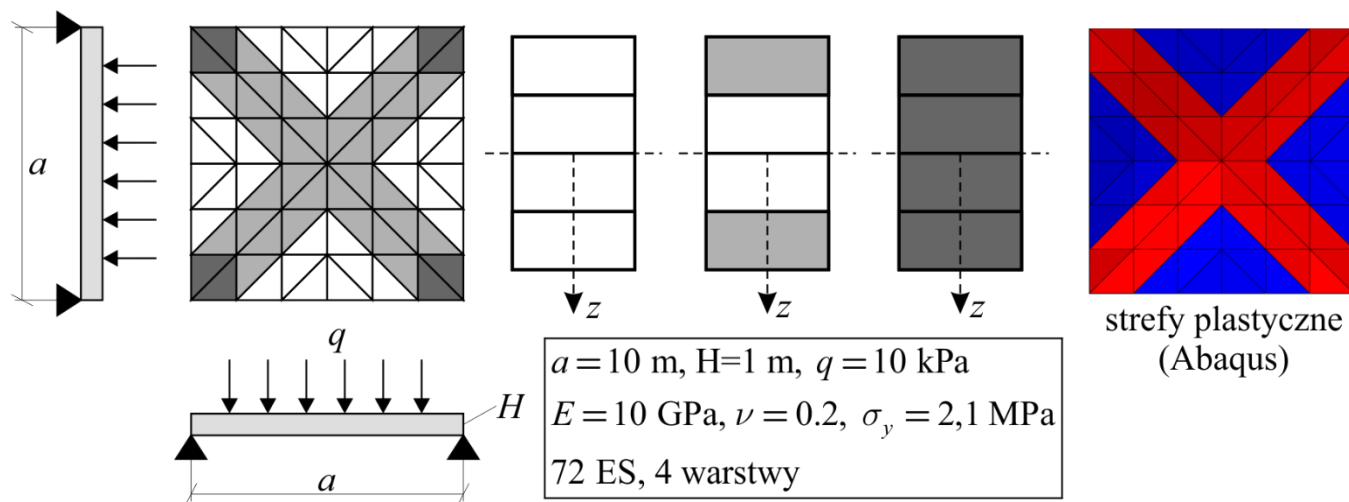
$$w_{\text{algorytm}} = 0,0228 \text{ m}$$

Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty

- przykład 2 - płyta wspornikowa

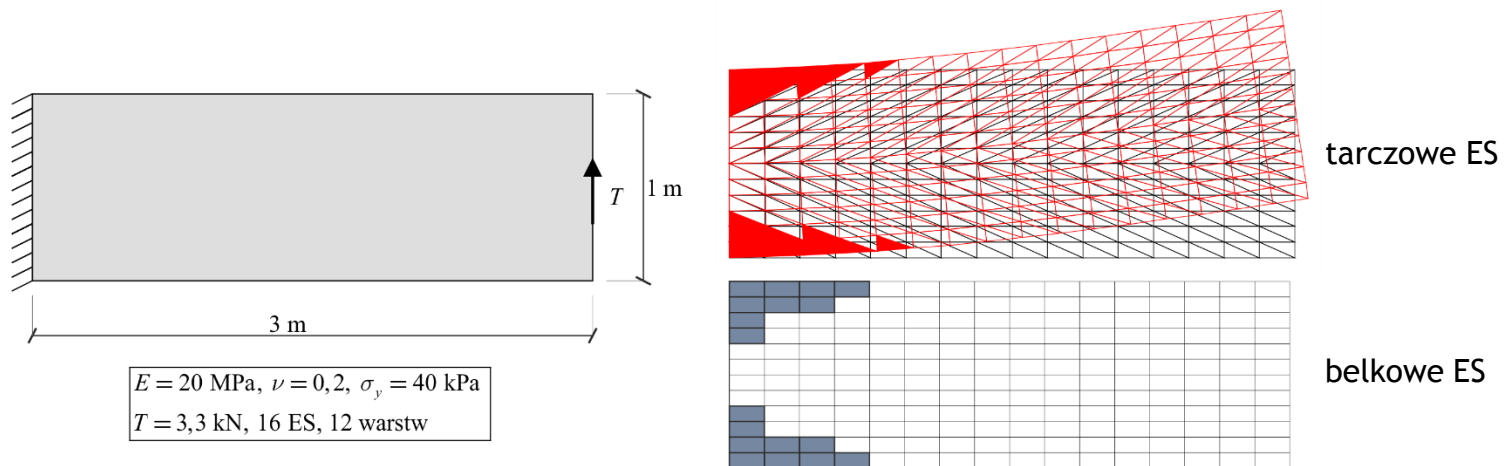


- przykład 3 - propagacja stref plastycznych w płycie swobodnie podpartej

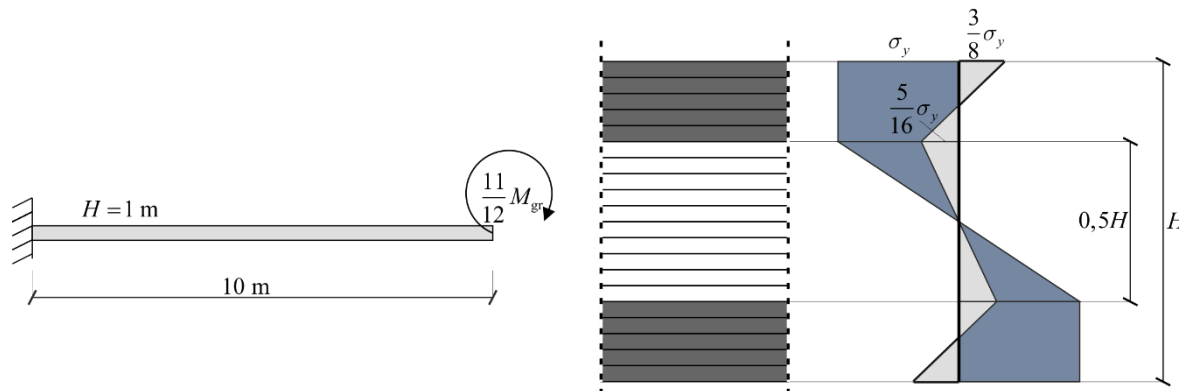


Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty - belki

- przykład 1 - porównanie stref plastycznych z rozwiązaniem dla tarczy

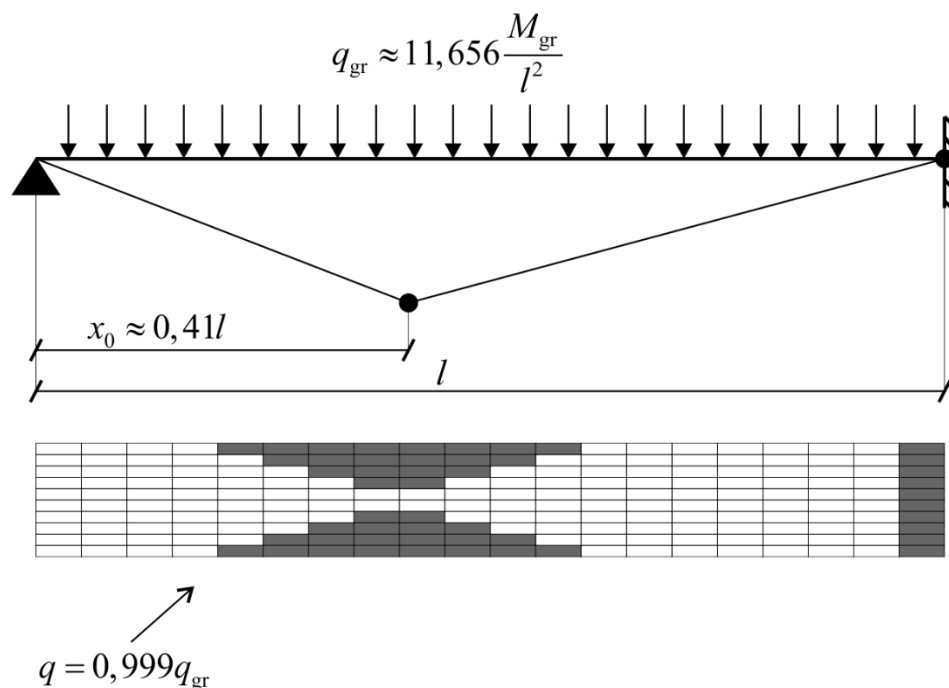


- przykład 2 - porównanie naprężeń resztkowych z rozwiązaniem ściskowym



Przykłady zastosowania, weryfikacja Płyty - belki

- przykład 3 - porównanie miejsc uplastycznienia z rozwiązaniem ścisłym



Podsumowanie

- Osiągnięte cele
 - skonstruowano **oryginalny** funkcjonał, który pozwala na wyprowadzenie pełnego układu równań teorii plastyczności
 - przedstawiono **metodę** wyprowadzenia równań **MES** dla zadanego ES oraz warunku plastyczności
 - opracowano **algorytm MES**, pozwalający na praktyczne zastosowanie funkcjonału i zaimplementowano go w środowisku Mathematica
 - przedstawiono rozwiązania wielu **przykładów** (w tym **weryfikacyjnych**) świadczących o poprawności podejścia i efektywności algorytmu dla elementów
 - tarczowych
 - płytowych (belkowych jako szczególny przypadek)
 - objętościowych (tylko wzory, brak przykładów numerycznych)oraz warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego dla
 - idealnej plastyczności
 - wzmocnienia kinematycznego
 - wzmocnienia izotropowego
 - dokonano **optymalizacji** algorytmu poprzez zmniejszenie rozmiaru równania MES

Podsumowanie

- Zalety przedstawionego podejścia
 - funkcjonal jest **uniwersalny** - może służyć wyprowadzeniu równań teorii plastyczności dla dowolnego ES oraz dla dowolnego warunku plastyczności przy spełnieniu omówionych ograniczeń
 - zastosowane podejście jest **czytelne** oraz stosunkowo **proste**, ponieważ nie wymaga dodatkowych zabiegów algorytmicznych w celu spełnienia wszystkich równań teorii plastyczności - równanie MES **bezpośrednio** wynika z założonego ES oraz warunku plastyczności (w przeciwieństwie do dotychczasowych rozwiązań)
 - opracowany na bazie funkcjonału algorytm przyrostowy MES jest **zbieżny** i **stabilny** niezależnie od liczby iteracji przyrostowych
 - dzięki temu, że równanie MES zawiera wszystkie równania teorii plastyczności, **return-mapping nie generuje błędu** rozwiązania, co czynią dotychczasowe algorytmy - błąd musi być w nich niwelowany poprzez dodatkowe operacje wydłużające **czas obliczeń**

Wystąpienia i publikacje

- Publikacje związane z tematem pracy doktorskiej:
 - Lewandowski J., Myślecki K., *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, nr 1, 2016, *Zastosowanie funkcjonatu Hu-Washizu w plastycznej analizie MES płyt grubych*, s. 423-430.
 - Lewandowski J., Myślecki K., *Modified Hu-Washizu principle as a general basis for FEM plasticity equations*, w: *Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues*, CRC Press/Balkema, London 2016, s. 345-348.
- wystąpienia konferencyjne związane z tematem pracy doktorskiej:
 - Myślecki K., Lewandowski J., "Sprężysto-plastyczne zginanie symetrycznej płyty przekładkowej", VIII Sympozjon "Kompozyty, konstrukcje warstwowe", 26-29.10.2017, Wrocław-Różanka
 - Myślecki K., Lewandowski J.: *Modified Hu-Washizu principle as a general basis for FEM plasticity equations*, PCM-CMM 2015, 8-11.09.15, Gdańsk
 - Myślecki K., Lewandowski J., "Plastyczna analiza MES panelu trójwarstwowego z zastosowaniem funkcjonatu Hu-Washizu", VII Sympozjon "Kompozyty, konstrukcje warstwowe", 15-18.10.2014, Wrocław-Pawłowice
- publikacje w trakcie procesu redakcyjnego
 - K. Myślecki, J. Lewandowski, *Universal variational principle for FEM plasticity equations*
- wszystkich publikacji: 8 (w tym 5 z Listy Ministerialnej i 1 z Listy Filadelfijskiej)
- wszystkich wystąpień konferencyjnych: 5 (w tym 1 o zasięgu międzynarodowym)



Dziękuję za uwagę